

Hong Kong Mathematics Olympiad (2017/18)

Heat Event (Individual)

香港數學競賽 (2017/18)

初賽項目(個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

甲部

Part A

1. 若  $a$  及  $b$  均為實數，求  $a^2 + b^2 + 12a - 8b + 2018$  的最小值。

If  $a$  and  $b$  are real numbers, find the minimum value of  $a^2 + b^2 + 12a - 8b + 2018$ .

2. 設  $a$  及  $k$  均為常數。若  $(6x^3 + ax^2 + 7x - 3) \div (2x^2 + kx - 1)$  的商和餘式分別為  $3x + 5$  及  $-5x + 2$ ，求  $a$  的值。

Let  $a$  and  $k$  be constants. If the quotient and the remainder of  $(6x^3 + ax^2 + 7x - 3) \div (2x^2 + kx - 1)$  are  $3x + 5$  and  $-5x + 2$  respectively, find the value of  $a$ .

3. 在編制某雜誌中每頁的頁碼時，總共用去了 2,046 個數字，問該雜誌總共有多少頁？（假設該雜誌第一頁的頁碼是 1。）

In numbering the pages of a magazine, 2,046 digits were used. How many pages are there in the magazine? (Assume the page number of the magazine starts from 1.)

4. 解  $\log\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \dots + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 5$ 。

Solve  $\log\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \dots + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 5$ .

5. 已知  $\frac{1 - 2^{-\frac{1}{x}}}{2^{-\frac{1}{x}} - 2^{-\frac{2}{x}}} = 4$ 。求  $x$  的值。

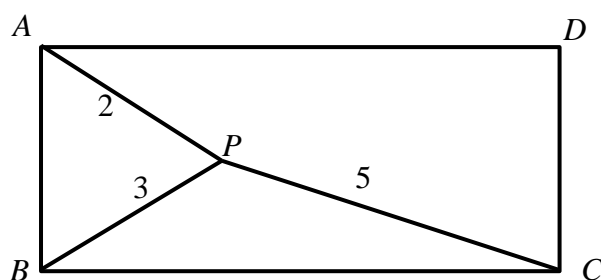
Given that  $\frac{1 - 2^{-\frac{1}{x}}}{2^{-\frac{1}{x}} - 2^{-\frac{2}{x}}} = 4$ . Find the value of  $x$ .

6. 若  $x$  為有理數，求  $x$  的值滿足聯立方程  $\begin{cases} y = 2x^2 - 11x + 15 \\ y = 2x^3 - 17x^2 + 16x + 35 \end{cases}$ 。

If  $x$  is a rational number, find the value of  $x$  satisfying the simultaneous equations

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 11x + 15 \\ y = 2x^3 - 17x^2 + 16x + 35 \end{cases}.$$

7. 如圖一所示， $P$  為長方形  $ABCD$  內的一點，使得  $PA = 2$ ， $PB = 3$  及  $PC = 5$ 。求  $PD$  的長度。  
As shown in Figure 1,  $P$  is a point inside a rectangle  $ABCD$  such that  $PA = 2$ ,  $PB = 3$  and  $PC = 5$ . Find the length of  $PD$ .

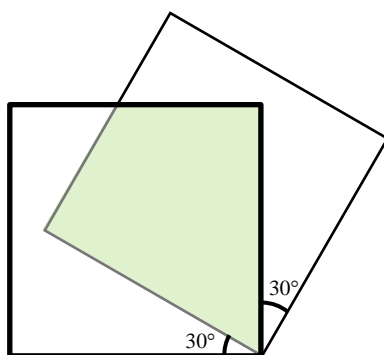


圖一

Figure 1

8. 如圖二所示，兩個邊長為  $x$  cm 的正方形於一角重疊。若兩個正方形的非重疊部分與重疊部分面積的比是  $a : 1$ ，求  $a$  的值。

As shown in Figure 2, two squares with side  $x$  cm coincide at one corner. If the ratio of the non-overlapping area to the overlapping area of the two squares is  $a : 1$ , find the value of  $a$ .

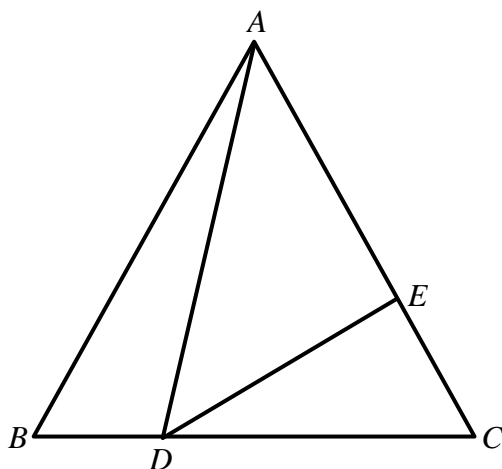


圖二

Figure 2

9. 如圖三所示， $ABC$  是一個等腰三角形，其中  $AB = AC = 8$  及  $BC = 4$ 。  $D$  及  $E$  分別為  $BC$  及  $AC$  上的點使得  $BD = 1$  及  $\angle ABC = \angle ADE$ 。求  $AE$  的長度。

As shown in Figure 3,  $ABC$  is an isosceles triangle with  $AB = AC = 8$  and  $BC = 4$ .  $D$  and  $E$  are points lying on  $BC$  and  $AC$  respectively such that  $BD = 1$  and  $\angle ABC = \angle ADE$ . Find the length of  $AE$ .



圖三

Figure 3

10.  $PQR$  是一個三角形，其中  $PQ = 13$ 、 $QR = 14$  及  $PR = 15$ 。以  $PR$  為直徑繪畫出圓  $C$ ， $C$  相交  $QR$  於點  $T$ 。求  $\triangle PTR$  的面積。

$PQR$  is a triangle with  $PQ = 13$ ,  $QR = 14$  and  $PR = 15$ . The circle  $C$  is drawn with diameter  $PR$ .  $C$  intersects  $QR$  at a point  $T$ . Find the area of  $\triangle PTR$ .

## 乙部

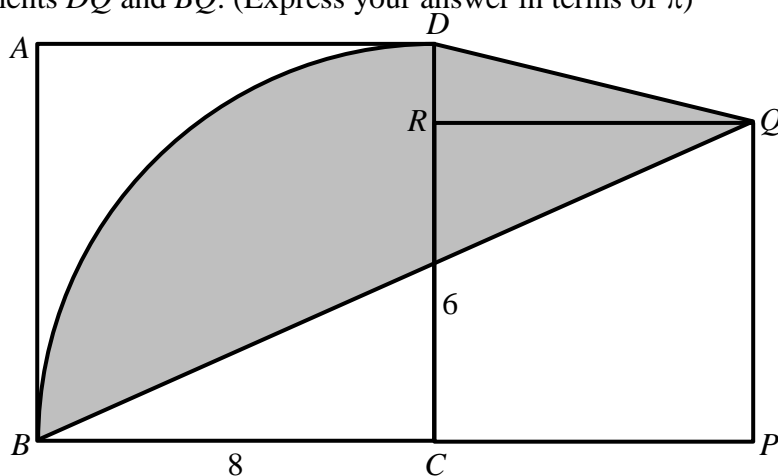
## Part B

11. 求  $3^x + 5 + \frac{36}{3^x + 4}$  的最小值。

Find the minimum value of  $3^x + 5 + \frac{36}{3^x + 4}$ .

12. 如圖四所示， $ABCD$  及  $PQRC$  為兩個連接的正方形。以  $C$  為圓心及  $BC$  為半徑繪畫出弧  $BD$ 。已知  $BC = 8$  及  $RC = 6$ 。求弧  $BD$  及線段  $DQ$  與  $BQ$  所圍成的區域的面積。(答案須以  $\pi$  表示)

As shown in Figure 4, two squares  $ABCD$  and  $PQRC$  are joined together. An arc  $BD$  is drawn with centre  $C$  and radius  $BC$ . Given that  $BC = 8$  and  $RC = 6$ . Find the area of the region bounded by the arc  $BD$ , line segments  $DQ$  and  $BQ$ . (Express your answer in terms of  $\pi$ )



圖四

Figure 4

13. 一個四位數可以透過把它的所有數字加起來，變成另一個數。例如：1234 可以變成 10，因為  $1+2+3+4=10$ 。究竟從 1998 至 4998（包括此兩個數）有多少個四位數經上述變換後不可以被 3 整除？

A 4-digit number can be transformed into another number by adding its digits. For example, 1234 can be transformed into 10 as  $1+2+3+4=10$ . How many numbers from 1998 to 4998 inclusive are **NOT** divisible by 3 after the above transformation?

14. 對任意實數  $x$  ( $x \neq 1$ )，定義函數  $f(x) = \frac{x}{1-x}$  及  $f \circ f(x) = f(f(x))$ 。求  $2017 \underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_{2018 \text{ 個 } f}(2018)$  的值。

For any real number  $x$  ( $x \neq 1$ ), define a function  $f(x) = \frac{x}{1-x}$  and  $f \circ f(x) = f(f(x))$ . Find the value of

$2017 \underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_{2018 \text{ s } f}(2018)$ .

15. 設  $N^2 = \overline{abcdefabc}$  為一個 9 位整數，其中  $N$  是 4 個相異質數的積及  $a, b, c, d, e, f$  均為非零數字且滿足  $\overline{def} = 2 \times \overline{abc}$ 。求  $N^2$  的最小值。

Let  $N^2 = \overline{abcdefabc}$  be a nine-digit positive integer, where  $N$  is the product of four distinct primes and  $a, b, c, d, e, f$  are non-zero digits that satisfy  $\overline{def} = 2 \times \overline{abc}$ . Find the least value of  $N^2$ .

完

END